

Разработка вычислительных моделей для решения задач атмосферной акустики.

О.В.Кудрявцев

1. Основные уравнения.

Разработка алгоритма вычислительной программы основана на известных уравнениях акустики (аэро- или гидродинамики). Вывод этих уравнений можно найти в любом учебнике аэродинамики. Полная система уравнений содержит следующие уравнения (см., например, [1], стр.32 и далее):

- Эйлера (уравнения движения частиц среды под действием сил упругости):

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P + F, \quad (1.1)$$

- уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho q \quad (1.2)$$

- и уравнения энтропии (или энергии)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0, \quad (1.3)$$

где ∇ представляет собой векторный оператор:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_2} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial y_3},$$

$\mathbf{v} = v_1, v_2, v_3$ - скорость среды (векторная величина); ρ - ее плотность; P - давление; S - энтропия. Время обозначается буквой t ; y_1, y_2, y_3 - пространственные декартовы координаты; F - приложенная извне объемная сила источника звука; q - внешний объемный источник скорости в жидкости: он даёт дополнительный объём, поступающий за единицу времени в единичный объём. Все входящие в уравнения величины зависят от пространственных координат. Если источник состоит из нескольких источников, распределённых по пространству, то решение уравнений будет представлять собой суперпозицию решений для каждого из источников.

Поскольку звук представляет собой просто наше восприятие производимых источником возмущений давления, прошедших через атмосферу, рассмотрим нестационарное возмущение с характерной длиной волны λ , распространяющееся со скоростью, типичное значение которой равно \tilde{C} , в среде, в которой скорость, давление и плотность определяются системой уравнений (1.1) – (1.3). Такое возмущение будет приводить к изменению скорости, давления, плотности и энтропии, когда оно доходит до наблюдателя. Все эти изменения происходят в масштабе времени $T_p = 1/f$, где f - характерная частота возмущения.

Запишем возмущённые величины:

$$u \equiv v - v_0, \quad p = P - p_0, \quad \rho' = \rho - \rho_0, \quad S' = S - S_0 \quad (1.4)$$

Здесь величины с индексом "0" характеризуют среднее (невозмущённое) состояние среды, например, v_0 – скорость движения среды (вектор скорости потока или ветра), p_0 – давление в среде (атмосферное давление). Амплитуда возмущения измеряется величиной флуктуаций u (колебательная скорость частиц среды, также векторная величина); p (акустическое давление), ρ' и S' . Но эти флуктуации являются настолько слабыми, даже для самых громких звуков, что нужно рассматривать только те потоки, в которых выполняются не только неравенство

$$u \ll \lambda / T_p, \quad (1.5)$$

но и также условия $p \ll \langle p_0 \rangle, \rho' \ll \langle \rho_0 \rangle, S' \ll \langle S_0 \rangle$.

2. Линеаризация уравнений.

Полная система уравнений аэродинамики удовлетворяется при любых движениях жидкости; значит, звуковые волны также удовлетворяют этим уравнениям. Это – точные уравнения. Но акустика интересуется только малыми колебаниями среды, и поэтому точность уравнений аэродинамики в акустике – это не только лишнее, но и вредное обстоятельство, поскольку оно связано с большой сложностью этих уравнений, в частности, их нелинейностью. Так как нас интересуют только звуковые волны малых амплитуд, то эти уравнения можно заменить более простыми, приближёнными, уравнениями, решения которых будут, тем не менее, мало отличаться от решений точных уравнений. Особенно важно, что упрощение позволит перейти к линейным уравнениям. В этом и заключается смысл линеаризации исходных уравнений.

Подставим значения v , P , ρ и S из выражений (1.4) в уравнения (1.1) – (1.3) и пренебрежём членами второго и высшего порядка малости по сравнению с возмущёнными величинами. Кроме того, можно не меняя степени точности, пренебречь отличием фактической плотности ρ от невозмущённого значения ρ_0 .

Опуская трудоемкие выкладки, сразу выпишем окончательные выражения – линеаризованные газодинамические уравнения.

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla u + u \cdot \nabla v_0 \right) + \rho' v_0 \cdot \nabla v_0 &= -\nabla p + F \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_0 u + \rho' v_0 \cdot \nabla &= \rho_0 q, \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla S' + u \cdot \nabla S_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Важным частным случаем неоднородной движущейся среды является стратифицированная (слоистая) среда, в которой функции v_0 , p_0 , ρ_0 и S_0 , характеризующие среднее состояние среды, зависят только от вертикальной координаты z . Поскольку в атмосфере горизонтальная составляющая скорости движения среды на один-два порядка превосходит вертикальную составляющую $v_{я}$, то будем полагать $v_{я} = 0$.

В стратифицированной движущейся адиабатической среде линеаризованную систему уравнений (1.6) можно строго свести к одному точному уравнению путём исключения всех величин, характеризующих волну, кроме одной, например, акустического давления p . Аэрогидродинамические уравнения при постоянной скорости потока в конечном итоге сводятся к дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных для звукового давления $p(t, \mathbf{r},)$, так называемому волновому уравнению:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{D_0^2}{Dt^2} p = \nabla \cdot F - \rho_0 \frac{D_0 q}{Dt}, \quad (1.7)$$

где $\frac{D_0}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla$ – полная производная по времени для среды с течением со скоростью \mathbf{v} .

3. Начальные и граничные условия.

При математическом описании физического процесса надо прежде всего поставить задачу, т.е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

Во-первых, это начальные условия. Они заключаются в задании значений функции и её первой производной при «начальном» значении аргумента, например, в момент времени $t=0$. При непрерывном процессе можно задать вид функции (зависимость её от времени). Для гармонического процесса с круговой частотой ω , например, функция будет иметь вид

$$F \sim \exp(-i\omega t) \quad (1.8)$$

Во-вторых, это граничные условия. Они заключаются в задании значений функции и её первой производной на границах среды с другими средами или поверхностями. Например, на абсолютно жёсткой поверхности нормальная компонента колебательной скорости частиц должна обращаться в нуль:

$$\mathbf{n} \mathbf{u} = 0, \quad (1.9)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности.

Если среда идеальна, то абсолютно жёсткая поверхность не накладывает никаких ограничений на касательную компоненту скорости частиц: газообразная (или жидкая) среда может беспрепятственно скользить вдоль границы. В действительности реальный газ (реальная жидкость) прилипает к границе и касательная скорость также обращается в нуль: вблизи границы реальная среда оказывается заторможенной, причём расстояние, на котором торможение ещё заметно, определяется вязкостью среды и частотой колебаний. Эта толщина акустического пограничного слоя практически настолько мала по сравнению с длиной звуковой волны, что эффектом прилипания обычно можно пренебречь. Примером жёсткой границы может служить граница атмосферы с водой и забетонированной поверхностью земли.

Другой важный тип границы – абсолютно мягкая граница. Граничное условие на такой границе – равенство нулю звукового давления:

$$p = 0. \quad (1.10)$$

Примером мягкой границы может служить граница воды и твердого тела с вакуумом или атмосферой.

Если границы отсутствуют, то должно выполняться условие погашаемости волны на бесконечности, т.е. стремление функции к нулю при стремлении точки наблюдения к бесконечности.

На границах могут быть заданы коэффициенты отражения звука, импедансные условия или же условия непрерывности нормальной составляющей колебательной скорости (или смещения) и звукового давления. Например, в атмосфере на некоторой высоте от земной поверхности можно задать коэффициент отражения равным нулю. Высота такой границы определяется, исходя из требований задачи, расстояниями от точки излучения акустической волны и частотой. На границе атмосферы с землёй обычно используются импедансные условия, когда задаётся значение нормального импеданса для реальной поверхности, определённого экспериментальным путём для типичных грунтов (трава, снег, песок, гравий и т.д.). Экспериментальные данные сведены в таблицу и привлекаются при расчётах по мере необходимости.

4. Методы и алгоритм решения.

Для стратифицированной по вертикали атмосферы задача может быть решена методом разделения переменных. Для решения уравнений в этом случае переходят к спектральным плотностям, используя Фурье-преобразование (см., например, [1], стр.41; [2], гл. VIII, п.73; [3]) :

$$p(t, \mathbf{r}, z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \boldsymbol{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t + i\boldsymbol{\alpha} \mathbf{r}) \tilde{P}(\boldsymbol{\alpha}, z, \omega) d\omega, \quad (1.11)$$

$\boldsymbol{\alpha} = \{k_x, k_y\}$ – горизонтальная составляющая волнового вектора $\mathbf{K}(z)$,

$\mathbf{r} = \{x, y\}$ – горизонтальное расстояние,

ω – круговая частота.

Подставив это выражение в волновое уравнение, получим в итоге одномерное уравнение Гельмгольца:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{i\omega \rho(z)} \frac{d\tilde{P}}{dz} \right) + [K^2(z) - \boldsymbol{\alpha}^2] \frac{\tilde{P}}{i\omega \rho(z)} = -\delta(z - z_0) \quad (1.12)$$

В этом уравнении трансформанта Фурье $\tilde{P}(\boldsymbol{\alpha}, z, \omega)$ представляет собой поперечную функцию Грина, а модифицированное волновое число $\mathbf{K}(z)$ определяется, например, формулой

$$K^2(z) = \frac{\Omega^2}{\tilde{n}^2} + \frac{\rho''}{2\rho} + \frac{3}{4} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \left(\frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}'}{\Omega} \right) - \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}''}{\Omega} \right) - 2 \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}'}{\Omega} \right)^2, \quad (1.13)$$

где $\Omega = \omega - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{v}$ – аналог круговой частоты, изменённой движением среды, $c=c(z)$ – скорость звука в среде, зависящая, главным образом, от атмосферного давления, абсолютной температуры T , влажности и скорости ветра \mathbf{v} (см., например, [4]), которые в свою очередь также зависят от координаты z (от высоты):

$$c(z) = A \sqrt{T(z)} + \mathbf{v}(z), \quad (1.14)$$

где для сухого воздуха постоянная $A = 20,67$.

\mathbf{K} имеет мнимую часть, выражающую коэффициент поглощения звука α на частоте ω :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} + i \cdot \alpha.$$

Коэффициент поглощения в воздухе α зависит главным образом от частоты [4] и задаётся либо табличным образом, либо в виде эмпирических выражений, одно из которых используется в расчётной программе и определяется формулой

$$\alpha = 0,005756 \cdot f^{1/3} \cdot \frac{1 + f^2}{1 + 10f^2}, \quad (1.15)$$

где f – частота в кГц.

Формула (1.11) даёт поле на любом, в том числе сколь угодно близком расстоянии от источника, поскольку является точным интегральным представлением, учитывающим излучение как однородных, так и неоднородных волн, а также учитывает все виды волн, участвующих в формировании звукового поля без их разделения на прямую, отражённую, боковую и т.д.

Для широкополосного сигнала, занимающего определённую полосу частот и имеющего комплексный спектр $S(\omega)$ в выражении (1.11) под интегралом вместо функции Грина будет входить произведение $S(\omega) \cdot \tilde{P}(\mathbf{ae}, z, \omega)$.

Все методы вычисления звукового поля в стратифицированной среде отличаются друг от друга тем, каким образом решается уравнение (1.12) и отыскивается поперечная функция Грина.

К наиболее употребляемым методам вычисления звуковых полей вблизи поверхности земли относятся: лучевой метод, метод нормальных волн, метод параболического уравнения и метод прямого численного интегрирования. Между этими методами или, по крайней мере, тремя из них существует связь, с помощью которой метод нормальных волн, лучевой и прямое численное интегрирование переходят один в другой.

Метод параболического уравнения, несмотря на определённые преимущества (возможность применения его для слабо-неоднородных по трассе сред и использования быстрых для счёта на ЭВМ пошаговых алгоритмов), требует для неоднородной атмосферы развития собственного аналитического аппарата весьма широкоугольного приближения (что обусловлено влиянием импедансно-поглощающей границы с землёй). Такой аппарат в достаточной степени пока не разработан.

Лучевой метод может быть рекомендован как предварительный, оценочный способ определения характеристик сигнала для простых условий распространения. Условием применимости лучевой теории является малое изменение свойств среды на расстоянии длины волны λ :

$$\frac{1}{K^2} \frac{dK^2}{dz} \cdot \lambda \ll 1$$

В реальной ситуации это может выполняться для звука довольно высокой частоты. В атмосфере, которая сама по себе является в значительной мере изменчивой, это условие играет решающую роль, поэтому прежде, чем использовать лучевой метод, следует проверить, соответствует ли нижняя граница спектра сигнала вышеупомянутому условию.

Существенным преимуществом лучевого метода является малое время счёта на ЭВМ, простота программного воплощения и небольшой объём памяти, занимаемый программным комплексом.

Метод нормальных волн является более точным, поскольку при его использовании устраняются многие трудности лучевой теории, такие, как каустики и зоны тени. Решение, полученное этим методом, частотно-зависимо, поскольку одним из основных параметров, определяющих нормальные моды, является частота звука.

В условиях атмосферы метод нормальных волн также мало пригоден, поскольку, во-первых, из-за отсутствия верхней границы количество нормальных волн хотя и остаётся конечным, но стремится к очень большому числу даже для низкочастотных компонент сигнала; во-вторых, для не слишком больших расстояний необходимо учитывать также большое число затухающих (неоднородных) нормальных волн, и, наконец, в-третьих, поиск собственных значений и собственных функций для произвольного вида вертикальных распределений атмосферных параметров может оказаться настолько сложным и громоздким, что основное преимущество метода (малое расчётное время) будет утрачено.

Наиболее точным методом определения звукового давления является метод прямого численного расчёта двойного интеграла (1.11) по \mathbf{a} .

В основе метода прямого численного интегрирования лежат следующие предпосылки:

- замена верхних бесконечных пределов интегрирования конечными максимальными значениями $K_{x_{max}}$ и $K_{y_{max}}$, такими, что величина отброшенной части каждого интеграла пренебрежимо мала по сравнению с его значениями в пределах от 0 до $K_{x,y_{max}}$;

- интегралы заменяются суммами M_x и M_y дискретных значений подынтегрального выражения в точках $K(m)_{x,y} = K(0)_{x,y} + (m-1) \cdot \Delta K_{x,y}$, где $K(0)_{x,y}$ – начальные значения горизонтальных волновых чисел (обычно полагают равными нулю); $m=1, 2, \dots (M_x, M_y)$; $\Delta K_{x,y}$ - шаг дискретизации. Шаг дискретизации (или число точек) выбирается с учетом осцилляций подынтегрального выражения; при этом

$$M_{x,y} = K_{x,y \max} / \Delta K_{x,y};$$

- функция Грина $\tilde{P}(\mathbf{a}, z, \omega)$ должна быть решением уравнения (1.12) для модели среды с коэффициентами $\rho(z)$ и $\mathbf{K}(z)$, адекватно отражающими реальную среду. Параметры атмосферы $\rho(z)$, $\mathbf{V}(z)$ и $c(z)$, как входные параметры расчётной программы, должны быть заданы либо аналитически, либо в виде массивов дискретных значений ρ_l , \mathbf{V}_l и c_l , определённых опытным или иным путём, на горизонтах z_l .

Основная вычислительная трудность заключается в определении функции Грина. Аналитическое решение уравнения (1.12) возможно лишь для немногих профилей $\rho(z)$ и $\mathbf{K}(z)$. Поэтому основным способом определения $\tilde{P}(\mathbf{a}, z, \omega)$ здесь также является численный.

Для модели горизонтально стратифицированной среды наиболее удобным является матричный метод нахождения функции Грина, при котором среда заменяется системой L слоёв (жидких или упругих), ограниченной сверху и снизу однородными полубезграничными пространствами. В каждом l -м слое толщины d_l реальные параметры $\rho(z)$ и $\mathbf{K}(z)$ заменяются величинами $\rho_l(z_l)$ и $\mathbf{K}_l(z_l)$, допускающими аналитическое решение уравнения (1.12). $l = 1, 2, \dots, L$. При переходе через границы слоёв должны сохраняться непрерывность звуковых давлений и нормальных колебательных скоростей. Обычно применяется кусочно-постоянная аппроксимация профилей $\rho_l(z_l)$ и температуры воздуха $T(z_l)$ $c_l(z_l)$, когда решение уравнения (1.12) находится в виде комбинации синусов и косинусов от аргумента.

В однородной среде в отсутствие источника одномерное уравнение Гельмгольца (1.12) имеет решение в виде суммы плоских волн, бегущих соответственно вверх и вниз:

$$p = A^+ \exp(i\gamma z) + A^- \exp(-i\gamma z), \quad (1.16)$$

где $\gamma = \sqrt{\mathbf{K}^2(\mathbf{z}) - \alpha^2}$ – вертикальное волновое число.

Когда функция Грина найдена для каждого значения $\mathbf{K}(\mathbf{m})_{x,y}$, нахождение на ЭВМ интеграла (1.11) не встречает трудностей. При этом возможно применение дискретного быстрого преобразования Фурье. Иногда при решении волнового уравнения и уравнения Гельмгольца бывает удобнее перейти к потенциалу колебательной скорости φ , связанному с акустическим давлением p и скоростью частиц \mathbf{u} соотношениями

$$p = \rho \frac{D_0 \varphi}{Dt} \quad (1.17)$$

и

$$\mathbf{u} = -\nabla \varphi. \quad (1.18)$$

Для трансформант Фурье эти соотношения примут вид

$$P = iR\Phi, \quad (1.19)$$

$$U = d\Phi/dz, \quad (1.20)$$

где $R = \rho\Omega$

Рассмотрим слоистую среду, показанную на Рис.1.

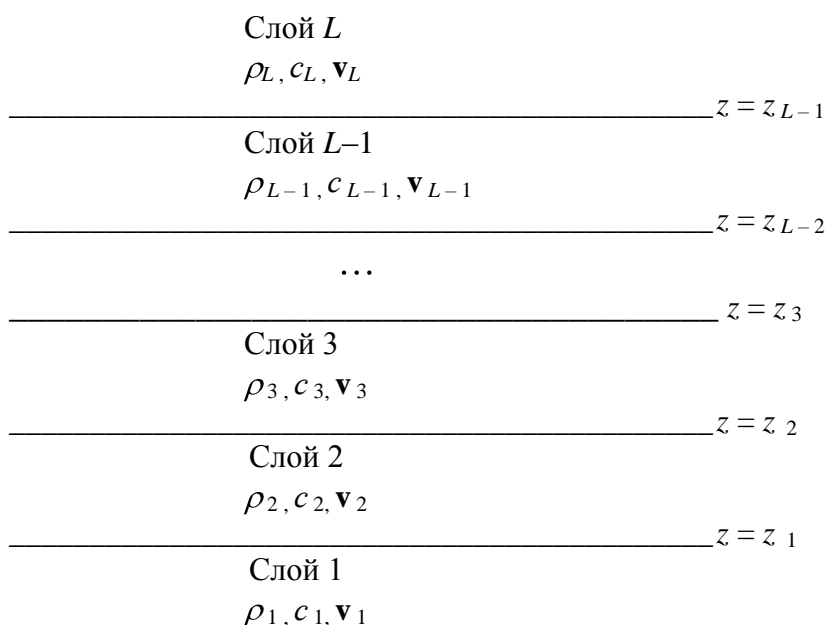


Рис.1.
 Модель слоистой среды

Каждый слой номера l характеризуется своими собственными, постоянными по толщине, параметрами: плотностью ρ_l , скоростью звука c_l , скоростью ветра \mathbf{v}_l . Заметим, что здесь всего L слоёв, $L-2$ ограниченных по толщине слоёв и $L-1$ границ между слоями. Слои 1 и L являются полупространствами, хотя нижний слой может в свою очередь

представлять собой слоистую упругую среду или же нижняя граница может быть импедансной.

Внутри каждого слоя l , не содержащего источник, решение для давления определяется уравнением (1.16), в котором коэффициенты обозначены как A_l^+ и A_l^- . Эти коэффициенты для всех слоёв определяются из граничных условий: непрерывность акустического давления и вертикальной компоненты колебательной скорости.

Внутри слоя l давление будет

$$p_l = iR_l [A_l^+ \exp(i\gamma_l z) + A_l^- \exp(-i\gamma_l z)], \quad (1.21)$$

вертикальная составляющая колебательной скорости:

$$w_l = i\gamma_l [A_l^+ \exp(i\gamma_l z) - A_l^- \exp(-i\gamma_l z)]. \quad (1.22)$$

Образуем пару $(L-1) \times 1$ матриц \mathbf{P}_-^d и \mathbf{P}_+^d , содержащих свои элементы давления (1.21), непосредственно ниже и выше границ раздела слоёв соответственно:

$$\mathbf{P}_-^d = \begin{bmatrix} iR_1 A_1^- \\ iR_2 [A_2^+ \exp(i\gamma_2 d_2) + A_2^- \exp(-i\gamma_2 d_2)] \\ iR_3 [A_3^+ \exp(i\gamma_3 d_3) + A_3^- \exp(-i\gamma_3 d_3)] \\ \dots \\ iR_{L-1} [A_{L-1}^+ \exp(i\gamma_{L-1} d_{L-1}) + A_{L-1}^- \exp(-i\gamma_{L-1} d_{L-1})] \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

и

$$\mathbf{P}_+^d = \begin{bmatrix} iR_2 (A_2^+ + A_2^-) \\ iR_3 (A_3^+ + A_3^-) \\ \dots \\ iR_{L-1} (A_{L-1}^+ + A_{L-1}^-) \\ iR_L A_L^+ \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

При записи этих выражений предполагалось, что нижняя граница (начало) слоя l находится на высоте z_{l-1} ; толщина слоя равна $d_l = z_l - z_{l-1}$, за исключением слоя 1, у которого отсутствует нижняя граница. Кроме того, поскольку слои 1 и L являются полупространствами, A_1^+ и A_L^- следует положить равными нулю, так как в этих слоях вследствие условия погашаемости волн на бесконечности отсутствуют волны, приходящие соответственно снизу (в слое 1) и сверху (в слое L).

Аналогично можно образовать пару матриц для вертикальной колебательной скорости непосредственно ниже и выше границ раздела слоёв соответственно:

$$\mathbf{W}_-^d = \begin{bmatrix} -i\gamma_1 A_1^- \\ i\gamma_2 [A_2^+ \exp(i\gamma_2 d_2) - A_2^- \exp(-i\gamma_2 d_2)] \\ i\gamma_3 [A_3^+ \exp(i\gamma_3 d_3) - A_3^- \exp(-i\gamma_3 d_3)] \\ \dots \\ i\gamma_{L-1} [A_{L-1}^+ \exp(i\gamma_{L-1} d_{L-1}) - A_{L-1}^- \exp(-i\gamma_{L-1} d_{L-1})] \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

и

$$\mathbf{W}_+^d = \begin{bmatrix} i\gamma_2(A_2^+ - A_2^-) \\ i\gamma_3(A_3^+ - A_3^-) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ i\gamma_{L-1}(A_{L-1}^+ - A_{L-1}^-) \\ i\gamma_L A_L^+ \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

К решениям для однородных слоёв, необходимо добавить частное решение в слое, содержащем источник. В этом случае справедливо уравнение

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} D_t^2 \phi = -q(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_s), \quad (1.27)$$

где z_s – высота источника.

Применив Фурье-преобразование, получим (для однородного слоя):

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \gamma^2 \Phi = Q\delta(z - z_s), \quad (1.28)$$

где Q – трансформанта Фурье для q .

Решение этого уравнения будет $\Phi = (iQ/2\gamma)\exp(i\gamma|z - z_s|)$ [5]. Из уравнений (1.19) и (1.20) следует, что

$$P = -\frac{QR}{2\gamma} \exp(i\gamma|z - z_s|), \quad (1.29)$$

$$U = -\frac{Q}{2} \text{sign}(z - z_s) \exp(i\gamma|z - z_s|). \quad (1.30)$$

Аналогично матрицам для решения однородных уравнений в слоях без источника можно образовать $(L-1) \times 1$ матриц для слоёв, содержащих источник, \mathbf{P}_-^s , \mathbf{P}_+^s , \mathbf{W}_-^s и \mathbf{W}_+^s .

Если источник находится только в слое n , то все элементы \mathbf{P}_-^s равны нулю за исключением элемента номера n , определяемого уравнением (1.29) при $z = z_n$. Единственный ненулевой элемент в \mathbf{P}_+^s имеет номер $(n-1)$, который в уравнении (1.29) вычисляется в слое n при $z = z_{n-1}$. Аналогичные соображения применимы и для матриц \mathbf{W}_-^s и \mathbf{W}_+^s .

На границах слоёв, учитывая условия непрерывности давлений и вертикальных колебательных скоростей, необходимо приравнять матрицы ниже и выше каждой границы:

$$\mathbf{P}_-^d + \mathbf{P}_-^s = \mathbf{P}_+^d + \mathbf{P}_+^s, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{W}_-^d + \mathbf{W}_-^s = \mathbf{W}_+^d + \mathbf{W}_+^s. \quad (1.32)$$

За исключением A_1^+ и A_L^- имеется $2 \times (L-1)$ коэффициентов, подлежащих определению. Коэффициенты (и, следовательно, функция Грина) в каждом слое могут быть найдены в результате решения системы уравнений (1.31) и (1.32), например, методом глобальной матрицы [6].

Когда функция Грина найдена для каждого значения $K(m)_{x,y}$, нахождение на ЭВМ интеграла (1.11) не встречает трудностей. При этом возможно либо прямое интегрирование, либо применение дискретного быстрого преобразования Фурье.

Поясним процесс расчёта акустического давления для гармонического сигнала частоты ω на расстоянии $\mathbf{r} = \{x, y\}$ от источника и высоте z .

Нам надо вычислить интеграл

$$p(\omega, x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\infty} P(\omega, k_x, k_y, z) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y, \quad (1.33)$$

где $P(\omega, k_x, k_y, z)$ – функция Грина для давления, вычисленная описанным выше способом.

Как уже раньше говорилось, бесконечные пределы в интеграле (1.33) заменяются конечными максимальными значениями $K_{x_{max}}$ и $K_{y_{max}}$, а интегралы заменяются суммами M_x и M_y дискретных значений подынтегрального выражения в точках

$$K(m)_{x,y} = K(0)_{x,y} + (m_{x,y}-1) \cdot \Delta K_{x,y} :$$

$$p(\omega, x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m_x=1}^{M_x} \sum_{m_y=1}^{M_y} P[K(0)_x + (m_x-1) \cdot \Delta K_x, K(0)_y + (m_y-1) \cdot \Delta K_y] \times \\ \times \exp\{i [(K(0)_x + (m_x-1) \cdot \Delta K_x)x + (K(0)_y + (m_y-1) \cdot \Delta K_y)y]\} \cdot \Delta K_x \cdot \Delta K_y \quad (1.34)$$

Если требуется рассчитать акустическое поле в зависимости от расстояния в M дискретных точках n_x и n_y , то x и y в (1.34) заменяются на $x = n_x \Delta r$ и $y = n_y \Delta r$, где шаг по расстоянию $\Delta r = \pi / K_{max}$, а $K_{max} = \text{MAX}(K_{x_{max}}, K_{y_{max}})$. В этом случае сумма (1.34) принимает форму двумерного дискретного преобразования Фурье, которую можно вычислить на ЭВМ, используя известные программы быстрого преобразования Фурье.

Интеграл (1.33) можно также переписать в цилиндрических координатах:

$$p(\omega, r, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega, k, \theta, z) \exp[ikr \cos(\theta - \varphi)] k d\theta dk, \quad (1.35)$$

где $k_x = k \cdot \cos \theta$, $k_y = k \cdot \sin \theta$, $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$.

Теперь интеграл (1.35) можно также записать в виде суммы и численно рассчитать на ЭВМ:

$$p(\omega, r, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N P[k_0 + (m-1) \cdot \Delta k, \theta_0 + (n-1) \Delta \theta] \times \\ \times \exp\{i r [k_0 + (m-1) \cdot \Delta k] \cdot \cos[\theta_0 + (n-1) \Delta \theta]\} \cdot [k_0 + (m-1) \cdot \Delta k] \Delta \theta \Delta k \quad (1.36)$$

Ниже приводится описание самой программы расчета акустического давления в стратифицированной движущейся среде.

Программа разработана для среды FORTRAN.

Входными данными программы являются:

- массив горизонтов по вертикали (координаты z_l);
- массив плотности атмосферы на этих горизонтах;
- массив скорости ветра на этих горизонтах;
- массив температуры атмосферы на этих горизонтах;
- направление и сила скорости ветра;
- массив скорости звука на этих горизонтах. Этот массив может быть заполнен в процессе выполнения расчёта по программе, исходя из плотности и температуры атмосферы, а также скорости и направления ветра;
- координаты и уровень излучения источников звука;
- характер или импеданс нижней границы (водная поверхность или грунт разных типов);
- размеры излучающей антенны и её высота над границей;
- направление на приёмную точку по отношению к оси антенны;
- частота излучения;
- коэффициент затухания (поглощения) звука в воздухе.

В программе использован алгоритм вычисления интеграла по формуле (1.36). В процессе выполнения программы вначале для одного источника на заданной частоте рассчитывается двумерный массив функции Грина для каждого значения горизонтального волнового числа $k_m = k_0 + (m-1)\Delta k$ и угла $\theta_n = \theta_0 + (n-1)\Delta\theta$, $m = (1, 2, \dots, M)$, $n = (1, 2, \dots, N)$. M – число точек суммирования по волновому числу k , N – число точек суммирования по углу θ . Затем заполняются массивы функции Грина для всех источников. На следующем этапе происходит суммирование в соответствии с формулой (1.36) и суммирование по всем источникам.

Выходными данными программы в зависимости от требований могут являться:

- массивы горизонтальных координат (x_i, y_i) (или массивы расстояний r_i и углов φ_i);
- массивы уровня звукового давления p_i на данных координатах для заданной частоты;
- массивы уровня (и фазы) звукового давления в зависимости от частоты, также заданной в виде массива (комплексный спектр), на заданном расстоянии от источника;
- массивы уровня звукового давления в зависимости от массивов координат и частот (для рисования объёмного графика).

Могут быть рассмотрены другие выходные данные.

Графика производится в среде MATLAB, куда «сбрасываются» рассчитанные массивы.

Разработанная на этой основе компьютерная программа относится к классу так называемых БПП (быстрых полевых программ, или по-английски FFP - fast field program). Её отличие от зарубежных аналогов заключается в способе нахождения поперечной функции Грина, в выборе максимальных значений $K_{x_{max}}$ и $K_{y_{max}}$, в введении фактического и добавочного поглощения (мнимой добавки в волновое число), в выборе величины шага интегрирования (определяется шириной пиков или полюсов комплексного подынтегрального выражения).

В следующей статье приводится краткое описание программы и примеры расчётов звукового поля в неоднородной атмосфере.

Литература

1. В.Е.Осташёв. Распространение звука в движущихся средах. – М., «Наука», 1992.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Гидродинамика.- М., «Наука», 1986.
3. D.C.Pridmore-Brown. Sound propagation in a temperature - and wind – stratified medium. – JASA, 1962, v.34, №4, 438-443.
4. М.А.Каллистратова, А.И.Кон. Радиоакустическое зондирование атмосферы. – М., «Наука», 1985.
5. P.M. Morse, K.U. Ingard. Theoretical Acoustics. – McGraw-Hill, N.-Y., 1968, 132-135.
6. H. Schmidt, G Tango. Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms. – Geophys. J. R. Astr. Soc., 1986, v.84, 331-359.